Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2004

Nombre: ____________________________

Carnet: _______________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR—Examen Final —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro de los cinco ejercicios

1. Sea Π el plano en R^3 de ecuación

$$x + y + z = 1$$

   y Π' el plano que pasa por $(1, 0, 0)\,(1, 1, 0)\,(1, 1, 1)$.

   a) ¿Son paralelos?

   b) Si no, encuentre una ecuación paramétrica para la recta l, intersección de Π y Π'

   Se recomienda hacer un dibujo que ilustre la situación.

2. Sean

$$\begin{aligned} x &= (1,\,2,\,0,\,0) \\ y &= (0,\,1,\,1,\,1) \end{aligned}$$

   vectores de R^4. Considere además el punto $w = (0,\,1,\,0,\,2)$. Finalmente llame S al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por x e y.

   a) Explique si $w \in S$.

   b) Encuentre un punto $z \in S$ que se halle a distancia mínima de w entre todos los puntos de S.

   c) ¿Cuántos tales $z \in S$ se pueden encontrar?

3. Sean f, g funciones lineales $f, g \in \mathcal{L}(E, E)$ donde E es un espacio vectorial complejo de demensión finita. Suponga que $f \circ g = g \circ f$.

   a) Demuestre que $Nu(f)$ y Im(f) son subespacios estables para g.

   b) Demuestre que hay un vector $x \in E$, $x \neq 0$ tal que x es autovector de ambas de f y g.

   Sugerencia: para un autovalor λ de f, considere la función $h = f - \lambda$ id y observe que g conmuta con h. Así puede usar (a)

4. Considere la función lineal de $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Explique por qué existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde la matriz de f es diagonal
   b) Calcule una tal base.

5. Considere la función lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) ¿Puede describir a todos los polinomios $q(x)$ tales que $q(f) = 0$?
   b) Sea $p(x)$ el polinomio característico de f. Es $p(x)$ uno de los $q(x)$ de (a) ?.